

Enviado por José Juan Castro

Análisis

Matemático II

Examen I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Matemático II Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Roxana Acedo Parra

Granada, 2026

Asignatura Análisis Matemático II.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Cañada Villar.

Descripción Primer parcial.

Fecha 27 de abril de 2026.

Duración 105 minutos.

Ejercicio 1. Responde razonadamente a la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. (1 punto) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(A) > 0$. Entonces existe un intervalo $I = (a, b)$, con $a < b$, tal que $I \subset A$.
2. (1 punto) $\mu(E) = 0 \implies \mathbb{R}^n \setminus E$ es denso en $\mathbb{R}^n$.
3. (1 punto) Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Si $\mathbb{R}^n \setminus E$ es denso en $\mathbb{R}^n \implies \mu(E) = 0$.
4. (1 punto) Sea $f \in L^1(a, b)$. El conjunto de puntos de $[a, b]$ donde f es discontinua tiene medida cero.

Ejercicio 2 (3 puntos). Decide, razonadamente, si la función:

$$f : (0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x}$$

pertenece, o no, a $L^1(0, 2)$.

Ejercicio 3 (3 puntos). Decide, razonadamente, si la función:

$$f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x}$$

pertenece, o no, a $L^1(2, +\infty)$.

Ejercicio 1. Responde razonadamente a la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. (1 punto) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(A) > 0$. Entonces existe un intervalo $I = (a, b)$, con $a < b$, tal que $I \subset A$.

Falso. Que un conjunto tenga medida de Lebesgue positiva $\mu(A) > 0$ no implica que contenga intervalos abiertos.

Contraejemplo: El conjunto de los números irracionales en $[0, 1]$ tiene medida 1, pero no contiene ningún intervalo (a, b) con $a < b$ porque los racionales son densos en $\mathbb{R}$.

2. (1 punto) $\mu(E) = 0 \implies \mathbb{R}^n \setminus E$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Nota: $\mathbb{R}^n \setminus E$ es denso en $\mathbb{R}^n \iff \overline{\mathbb{R}^n \setminus E} = \mathbb{R}^n$

Verdadero. Si $\mathbb{R}^n \setminus E$ no fuera denso en $\mathbb{R}^n$, existiría una bola abierta $B(x, r)$ tal que $B(x, r) \subset E$. Sin embargo, la medida de cualquier bola abierta es estrictamente positiva ($\mu(B(x, r)) > 0$), lo que contradiría la hipótesis de que $\mu(E) = 0$.

3. (1 punto) Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Si $\mathbb{R}^n \setminus E$ es denso en $\mathbb{R}^n \implies \mu(E) = 0$.

Falso. El hecho de que el complementario sea denso no garantiza que el conjunto original tenga medida nula.

Contraejemplo: Sea $E = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Su complementario en $[0, 1]$ es $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, que es denso en $[0, 1]$, pero $\mu(E) = 1 \neq 0$.

4. (1 punto) Sea $f \in L^1(a, b)$. El conjunto de puntos de $[a, b]$ donde f es discontinua tiene medida cero.

Falso. Esta propiedad es característica de la integrabilidad de Riemann (Teorema de Lebesgue-Vitali). En la teoría de la medida de Lebesgue, una función puede ser integrable ($f \in L^1$) y ser discontinua en un conjunto de medida positiva o incluso en todo su dominio.

Ejemplo: La función característica de los irracionales en $[a, b]$ es integrable Lebesgue, pero discontinua en todos los puntos de $[a, b]$. Definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Debido a la densidad de los racionales e irracionales, cualquier entorno de cualquier punto $x \in [a, b]$ contiene puntos donde la función vale 1 y puntos donde vale 0. Por tanto, f es discontinua en todo su dominio. Al ser discontinua en todos sus puntos, el conjunto de discontinuidades no tiene medida cero ($b - a > 0$). Según el criterio de Lebesgue-Vitali, la función no es integrable Riemann. Sin embargo, según Lebesgue:

El conjunto de los racionales $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ es numerable y tiene medida de Lebesgue nula ($\mu = 0$). Así, f es igual a la función constante 1 casi por doquier. Su integral es:

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu = \mu([a, b] \setminus \mathbb{Q}) = (b - a) - 0 = b - a$$

Como el resultado es finito, $f \in L^1(a, b)$.

Ejercicio 2 (3 puntos). Decide, razonadamente, si la función:

$$f : (0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x}$$

pertenece, o no, a $L^1(0, 2)$.

Como f es continua en $(0, 2] \Rightarrow f$ es medible en $(0, 2]$.

Sabemos que

$$L^1(a, b) = \left\{ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \exists \int_a^b f(x) dx \right\}$$

Veamos si acotándola determinamos si existe su integral o no.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

De esta manera tenemos que

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx = 2\sqrt{2} - \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

Como $\frac{\sqrt{x+1}}{x} \geq \frac{1}{x}$, entonces

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx \geq \int_0^2 \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_0^2 = \ln(2) - (-\infty) = +\infty$$

Consecuentemente, $f \notin L^1(0, 2)$.

Aunque **no sea el objetivo de la asignatura**, se podría hacer calculando la primitiva de la función:

$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

Para la segunda integral, usamos el cambio $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = u^2 - 1, dx = 2u du$:

$$\int \frac{u}{u^2 - 1} 2u du = 2 \int \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du = 2u + \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right|$$

La primitiva general $F(x)$ es:

$$F(x) = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} - \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right|$$

Analizamos el límite cuando $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 2(0) - 2(1) - \ln \left| \frac{1-1}{1+1} \right| = -2 - \ln(0) = +\infty$$

Como la integral diverge en el extremo inferior:

$$f \notin L^1(0, 2)$$

Ejercicio 3 (3 puntos). Decide, razonadamente, si la función:

$$f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x}$$

pertenece, o no, a $L^1(2, +\infty)$.

Como f es continua en $(2, +\infty) \Rightarrow f$ es medible en $(2, +\infty)$.

Podemos volver a acotarla

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{-1}{x \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}$$

Como f es medible entonces, $f \in L^1(2, +\infty) \iff |f| \in L^1(2, +\infty)$

$$\frac{1}{x \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x} + x \cdot \sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{2x \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

Calculando

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} dx = \left[\frac{-1}{\sqrt{x}} \right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Podemos concluir que $f \in L^1(2, +\infty)$.

Aunque **signa sin ser el objetivo de la asignatura**, podemos evaluar el comportamiento de la primitiva $F(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(2)$$

Analizamos los términos de $F(x)$ en el infinito:

Para $2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = 0$$

Para el término logarítmico:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right| = \ln(1) = 0$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, la integral es igual a $-F(2)$, que es un valor real finito:

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = - \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \ln \left| \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \right| \right) < \infty$$

Consecuentemente:

$$f \in L^1(2, +\infty)$$